



TITLE:

# Morseの理論について (光学スペクトルの特異点の研究会報告集)

AUTHOR(S):

高橋, 恒郎

---

CITATION:

高橋, 恒郎. Morseの理論について (光学スペクトルの特異点の研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 30: 13-21

ISSUE DATE:

1967-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107550>

RIGHT:

## Morse の理論について

教育大 理 高橋恒郎

Morse の理論は二つの部分に分れている。一つは、多様体上に与えられた函数の臨界点と、多様体の位相構造との関係を与える理論であり、他方は、Riemann 多様体上の測地線の理論である。この二つは勿論密接な関係があるが、ここでは測地線の理論にはふれない。

§1 においては必要な言葉の定義と、Morse 理論の主な結果を述べる。(定理等の証明はすべて省略した。) §2 において簡単な例として 2 次元の輪環面上の特別な函数について考察してみた。

### §1. 定義と定理.

$M$  を  $n$  次元の微分多様体とし、 $f$  を  $M$  上で定義された微分可能な函数とする。(ここで微分可能とは class  $C^\infty$ , i.e. すべての階数の偏導函数が存在するという意味で用いる)。

$\{u^1, u^2, \dots, u^n\}$  を  $M$  の点  $p$  のまわりの局所座標系としたとき、

点  $p$  において

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial u^1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial u^n} = 0$$

が成り立つとき、点  $p$  を  $f$  の臨界点 (critical point) といい、  
臨界点において  $f$  のとる値を  $f$  の臨界値 (critical value) と  
いう。

例えば、点  $p$  において  $f$  が極大値、又は極小値をとるなら  
ば、 $p$  は  $f$  の臨界点である。

点  $p$  が  $f$  の臨界点であるとき、 $p$  において

$$(2) \quad \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right)$$

なる行列を考える。これは  $n$  次の正方行列で、これを点  $p$  に  
おける  $f$  のハッセの行列という。ハッセの行列は座標系のと  
り方に依存するが、その負の固有値の数 (重複もこめて) お  
よび階数は座標系に依存しないで済まる。そこで、ハッセの  
行列の負の固有値の数を臨界点  $p$  の指標 (index) といい、又  
ハッセの行列が退化しないとき、 $p$  は正則な (non-degenerate)  
臨界点という。

次の定理は臨界点のまわりでの函数の変化の具合と、指標  
との関係を与えるだけでなく、Morse の理論の基礎になる定  
理である。

定理 1. (Morse の Lemma)  $M$  の点  $p$  が指標  $\lambda$  の正則な臨界点ならば,  $p$  のまわりの局所座標系  $\{x^1, \dots, x^n\}$  を適当にとつて,  $p$  の座標は  $(0, 0, \dots, 0)$  で, しかも  $p$  の十分小さな近傍において, 函数  $f$  を

$$(3) \quad f = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$$

と表わすことが出来る.

この定理から直ちに次の事がわかる.

系 1. 正則な臨界点は孤立臨界点である. (i.e. 点  $p$  を正則な臨界点とすると, 点  $p$  の十分小さな近傍内には臨界点は存在しない).

系 2. 正則な臨界点  $p$  において, 函数  $f$  が極大値 (又は極小値) をとるための必要十分条件は,  $p$  の指標が  $m = \dim M$  (又は 0) なることである.

さて, 函数  $f$  と実数  $a$  に対して,  $M$  の部分集合  $M^a$  を

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \mid p \in M, f(p) \leq a\}$$

とする.  $M^{-\infty}$  は空集合であり,  $M^\infty$  は  $M$  自身とする.

一般に位相空間  $X$  に対し,  $X$  の  $k$  次元のバッチ数を  $R_k(X)$

(係数群は適当に一つ定めておく),  $X$  とその部分集合  $A$  に対して,  $X$  の  $A$  を基底とする相対バッチ数を  $R_k(X, A)$  と書くことにする.

定理 2.  $a, b \in \mathbb{R}$  なる実数と,  $f^{-1}[a, b] (= \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\})$  なる  $M$  の点  $p$  の全体) はコンパクトでしかも臨界点を含まないとする. このとき,  $M^a$  は  $M^b$  に微分同型で, 特に

$$(4) \quad \begin{cases} R_k(M^a) = R_k(M^b) \\ R_k(M^b, M^a) = 0 \end{cases} \quad k=0, 1, \dots, n$$

である.

(4) は  $a$  から  $b$  までの間に臨界値が存在しないとき,  $M^a$  と  $M^b$  のバッチ数に変化がないことを示す. 従ってバッチ数に変化がみられるのは, その間に臨界値が存在するときで, その場合は次の定理により示される.

定理 3. 実数  $a$  が臨界値で,  $a$  を臨界値にもつ臨界点は  $p_1, p_2, \dots, p_k$  でそれらはすべて正則で, 指標は  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  とする. もし十分小さな  $\varepsilon > 0$  をとったとき,  $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$  内には  $a$  以外に臨界値はなく,  $f^{-1}[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$  はコンパクト

とすると,  $M^{a+\varepsilon}$  は  $M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}$  と同じホモ

トロピーをもつ. 特に,

$$(5) \quad R_k(M^{a+\varepsilon}) = R_k(M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

すなわち,  $M^{a-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_R}$  は,  $M^{a-\varepsilon}$  に  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_R}$

なる cell を attach したものである. ( $e^{\lambda}$  は  $\lambda$  次元

の cell).

一般に位相空間  $X$  に対して

$$(6) \quad R_k(X \cup e^{\lambda}, X) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = \lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ. したがって次の系を得る.

系. 定理 3 と同じ仮定のもとに,  $a$  を臨界値にもつような指標  $\lambda$  の正則な臨界点の個数を  $C_\lambda(a)$  とすると  
 $\lambda$  は,

$$(7) \quad R_\lambda(M^{a+\varepsilon}, M^{a-\varepsilon}) \leq C_\lambda(a)$$

が成り立つ.

この系と定理 3 より,  $M^a$  のバッチ数は  $a$  が段々と増大するにつれて,  $a$  が指標  $\lambda$  の正則な臨界点の臨界値を乗り越すたびに, 増えるが, その増え方は, 臨界点の個数以下である

(これは厳密な言い方ではない) ことがわかる.

以上の事と簡単な計算により次の Morse の不等式が得られる.

定理 4.  $M$  がコンパクトな微分多様体で,  $f$  は  $M$  上の微分可能な函数で正則な臨界点だけをもつとする. 指標  $\lambda$  なる臨界点の個数を  $C_\lambda$  とするとき, 次の不等式が成り立つ.

$$(8) \quad R_\lambda(M) \leq C_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

$$(9) \quad \chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda C_\lambda$$

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k R_{\lambda-k}(M) \leq \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k C_{\lambda-k} \quad (\lambda = 0, 1, \dots, n)$$

ここに  $\chi(M)$  は,  $M$  の Euler 標数であって

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k R_k(M)$$

で与えられる.

以上が Morse の理論の概略であるが, 定理 4 において仮定したように, 函数  $f$  の臨界点はすべて正則であるという仮定を必要としたが, その点については次の二つの定理がある.

定理 5. 任意の  $n$  次元の微分多様体  $M$  において, 正則な臨

界点しかもたず、しかも各任意の実数  $a$  に対して  $M^a$  がコンパクトになる様な微分可能な関数が存在する。

定理 6.  $M$  上の任意の微分可能な関数  $g$  に対して、 $g$  が有界ならば、正則な既約点しかもたない関数で  $g$  に近似的に近似的に出来る。

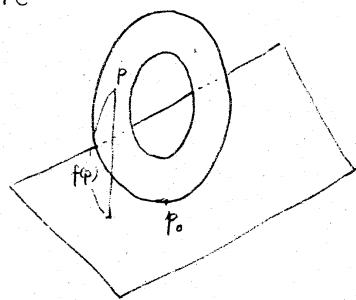
## § 2. 輪環面における例.

3次元ユークリッド空間内で輪環面を考える。簡単のために、半径  $b$  の円をその中心から  $a (> b)$  だけ離れた直線のまわりに回転して出来たものとする。これを  $M$  とすると  $M$  は2次元の微分多様体である。  $M$  上の一点  $p_0$  における接平面から  $M$  上の任意の点  $p$  までの高さを  $f(p)$  としよう。

回転軸を  $y$  軸にとり、点  $(a, 0, 0)$  を中心とし半径  $b$  の円を  $xy$ -平面内に考え、これを  $y$  軸のまわりに回転したものと考える。

このとき、  $M$  は  $(u, v)$  を適当にとつて

$$(1) \quad \begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = b \sin u \\ z = (a + b \cos u) \sin v. \end{cases}$$



と表わすことが出来る。  $p_0$  を  $(0, 0, -(a+b))$  なる点と



とるこ、  $f$  は

$$(12) \quad f(u, v) = (a + b \cos u) \sin v + a + b.$$

とるこ、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -b \sin u \sin v, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (a + b \cos u) \cos v$$

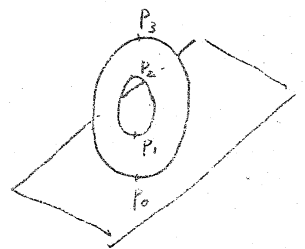
より臨界点を求めると、次の様な表を得る。

臨界点	$(u, v)$	$(x, y, z)$	$f(p)$	ヘッセの行列	指標
$p_0$	$(0, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a+b))$	0	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$	0
$p_1$	$(\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(0, 0, -(a-b))$	$2b$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$	1
$p_2$	$(\pi, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0, (a-b))$	$2a$	$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	1
$p_3$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0, a+b)$	$2(a+b)$	$\begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$	2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \cos u \sin v & -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \cos v & -(a + b \cos u) \sin v \end{pmatrix}$$

より各臨界点でのヘッセの行列、および指標は又上の表の様になる。従ってすべての臨界点は正則である。

臨界点の位置は右の図の様になっている。



次に、 $c \in \mathbb{R}$  とし、 $M^c$  の変化の様子をみてみる。

(1)  $c < 0 = f(p_0)$  のとき  $M^c$  は空集合.

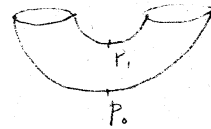
(2)  $0 < c < 2a = f(p_1)$  のとき  $M^c$  は

2-cell に同位相.



(3)  $2a < c < 2a = f(p_1)$  のとき  $M^c$  は

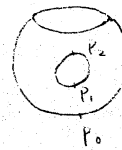
円柱に同位相.



(4)  $2a < c < 2(a+b) = f(p_2)$  のとき  $M^c$  は

円を境界にもつ genus 1 の 2-cell

な曲面.



(5)  $2(a+b) < c$  のとき  $M^c = M$

以上の各々の場合のバッチ数を求めると次の表の様になり

通り越した臨界点の指標が  $n$  のとき,  $n$  次のバッチ数が

度 1 (臨界点の個数) だけ増えることがわかる.

$c$	$R_0(M^c)$	$R_1(M^c)$	$R_2(M^c)$
$c < 0$	0	0	0
$0 < c < 2a$	1	0	0
$2a < c < 2a$	1	1	0
$2a < c < 2(a+b)$	1	2	0
$2(a+b) < c$	1	2	1

この場合は  $R_n(M) = C_n$  である.